

II. OPERAȚII CU PROPOZIȚII

Teodor Dima

1. Propoziții compuse; funcții de adevăr

Propoziția compusă are ca elemente propoziții simple legate între ele prin *operatori logici numiți și functori, conectori sau junctori*. Forma logică a propoziției compuse are ca elemente *variabile propoziționale* legate prin *variabile operaționale*:

$$p \omega q \omega r \omega \dots \omega z$$

(unde p, q, r, \dots, z simbolizează propoziții simple, iar ω simbolizează operații logice sau legături logice). Deci operația logică cu propoziții poate fi considerată și ca o relație logică între propoziții.

Fiecare propoziție simplă poate să aibă o anumită valoare de adevăr. De aici rezultă că valoarea de adevăr a unei propoziții compuse este în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor simple componente. Nu se intră în structura propozițiilor simple componente; se ia în considerare numai valoarea lor logică de adevăr.

Din acest punct de vedere, operatorii logici sau functorii pot lega un număr mare de propoziții (cu n argumente). Practic au importanță operațiile logice cu una și cu două variabile propoziționale (de ordinul unu și de ordinul doi).

*Operațiile se definesc prin **tabele de adevăr (matrice logice de adevăr, scheme)**.*

Există în total patru operații logice de ordinul unu și șaisprezece operații logice de ordinul doi, dar nu toate sunt importante. Numărul funcțiilor de adevăr (N), presupunând că există n variabile și m valori de adevăr, se calculează astfel:

$$N = m^{m^n}$$

Pentru $m = 2$ există două valori de adevăr (1 = adevărat, 0 = fals) și pentru $n = 1$, se obțin: $N=2^{2^1}$ adică 4 funcții de adevăr de ordinul unu, exprimate în următorul tabel:

P	$\overset{+}{p}$	\bar{p}
1	1	0
0	0	1

unde $\overset{+}{p}$ = afirmarea unei propoziții,

\bar{p} = negarea unei propoziții.

Se observă că:

1. Prin afirmarea unei propoziții adevărate se obține propoziția adevărată respectivă.
2. Prin afirmarea unei propoziții false se obține propoziția falsă respectivă.

(altfel spus, afirmarea nu modifică valoarea de adevăr a propoziției; de aceea, ea este subînțeleasă - ori de câte ori o variabilă propozițională nu este însoțită de un simbol care să însemne afirmarea sa, se subînțelege că ea este afirmată).

3. Prin negarea unei propoziții adevărate se obține o propoziție falsă.

4. Prin negarea unei propoziții false se obține o propoziție adevărată.

Pentru $n = 2$ se obțin:

$$N = 2^{2^2}$$

adică 16 funcții de adevăr de ordinul doi, exprimate în următorul tabel:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Denumirile acestor funcții de adevăr sunt:

1 = tautologie

2 = disjuncție neexclusivă

3 = replicație (inversa implicației)

4 = afirmarea lui p

5 = implicație

6 = afirmarea lui q

7 = echivalență

8 = conjuncție

9 = negarea conjuncției (incompatibilitate)

10 = disjuncție exclusivă

11 = negarea lui q

12 = negarea implicației

13 = negarea lui p

14 = negarea replicației

15 = negarea disjuncției neexclusive (rejecția)

16 = negarea tautologiei (contradicție)

2. Definiri ale principalelor funcții de adevăr

2.1. Negația.

Data fiind o propoziție oarecare, p, putem construi din ea o propoziție falsă, dacă p este adevărată, și o propoziție adevărată, dacă ea este falsă. De fiecare dată obținem negația unei propoziții p; vom simboliza negația lui p prin \bar{p} și vom citi “non-p”.

În limbajul cotidian, pentru a nega o propoziție, 0recurgem de obicei la cuvântul “nu”, plasat fie la începutul propoziției, fie în interior: *Nu este adevărat că ceasul meu arată ora exactă; Ceasul meu nu arată ora exactă*; alteori este nevoie de o transformare a propoziției supusă negării; de exemplu, propoziția *Uneori ninge în aprilie* nu are ca negație *Uneori nu ninge în aprilie*, pentru că ambele propoziții pot fi adevărate; negația propoziției *Uneori ninge în aprilie* este *Niciodată nu ninge în aprilie* sau *Nu este adevărat că uneori ninge în aprilie*.

2.2. **Tautologie, contradicție, formule sintetice.**

Cele 16 funcții de adevăr sunt de trei tipuri: fie o funcție întotdeauna adevărată, fie o funcție întotdeauna falsă, fie uneori adevărată, uneori falsă. Astfel, funcția (1) din tabel este o funcție *întotdeauna adevărată*, indiferent de valorile de adevăr pe care le primesc variabilele propoziționale; ea se numește *tautologie* sau *formulă analitică*.

Toate legile logice se exprimă prin formule analitice.

Despre ele vom vorbi într-un paragraf special. Negarea unei tautologii este o funcții propozițională *totdeauna falsă*, indiferent de valorile de adevăr ale variabilelor propoziționale; ea se numește *contradicție* (vezi funcția 16 din tabel). Celelalte 14 funcții din tabel sunt formule uneori adevărate, alteori false; rezultatul depinde de valorile de adevăr ale variabilelor propoziționale. ele se numesc *formule sintetice* sau *realizabile* sau contingente.

Facem precizarea că orice formulă, cu n variabile și n operatori, este o tautologie, dacă este întotdeauna adevărată, o contradicție, dacă este întotdeauna falsă, și sintetică, dacă este numai uneori adevărată.

2.3. **Implicația.**

Implicația este exprimată în tabelul anterior pe coloana a cincea; există mai multe simboluri pentru exprimarea sa formală; vom scrie “ $p \rightarrow q$ ”, vom citi “dacă p atunci q ” și o vom defini prin următorul tabel de adevăr:

p	\rightarrow	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

În relația implicațională, variabila care se află la stânga săgeții se numește *antecedent*, iar variabila din dreapta se numește *secvent*: cunoscând aceste denumiri, vom putea înțelege semnificația tabelului, definind astfel implicația:

Ea este falsă, atunci când antecedentul este adevărat și secventul fals; în celelalte cazuri, ea este adevărată.

În limba română, implicația este redată prin *propoziții condiționale* sau prin *judecăți ipotetice*. Acestea redau *relații de dependență* dintre obiecte, fapte, proprietăți etc.

Cele mai importante relații de dependență sunt relațiile condiționale, adică relațiile dintre condiție și consecință.

Pentru ca o relație de dependență să existe, este necesară o *condiție suficientă*. De exemplu, în judecata ipotetică:

Dacă este ziuă, atunci este lumină,
condiția (*dacă este ziuă*) este *suficientă* pentru producerea consecințelor (*este lumină*), dar *nu este necesară*, deoarece lumina poate proveni și din surse artificiale.

Atunci când exprimă un *raport de condiționare numai suficientă*, judecata se numește *ipotetică neexclusivă*.

Judecata ipotetică nu este introdusă întotdeauna prin expresia “dacă..., atunci...”, ci “în ipoteza că...”, “când”, “de”, “să” sau prin simpla alăturare a propozițiilor simple componente.

De exemplu,

De treci codrii de aramă, de departe vezi...

(M.Eminescu)

Ai carte, ai parte.

Pe de altă parte, există propoziții introduse prin “dacă..., atunci” care nu sunt ipotetice; ele pot fi propoziții concesive, optative etc.

În manuale sunt multe feluri de propoziții ipotetice; ele redau legi, teoreme, reguli care exprimă relații de conținut între antecedent și secvent, între condiție și consecință, între cauză și efect, între mijloc și scop etc.

Să ne întoarcem la funcția propozițională numită mai sus *implicație*. Înțelegem acum că implicația: “ $p \rightarrow q$ ” (face) abstracție de înțelesuri, pentru că ea realizează o conexiune între valorile logice adevărat și fals. Ea a fost numită *implicație materială* și este definită prin tabela de adevăr respectivă unde au importanță numai combinațiile dintre valorile de adevăr (adevărat și fals). De aceea nu trebuie să surprindă astfel de implicații:

$(2 + 2 = 4) \longrightarrow$ (*zăpada este albă*),

$(2 + 2 = 5) \longrightarrow$ (*zăpada este albă*),

$(2 + 2 = 5) \longrightarrow$ (*zăpada este neagră*).

Astfel de relații sunt posibile, deoarece implicația materială nu leagă înțelesuri, ci valori logice atribuite propozițiilor. Mai mult, o propoziție implicativă nu aserțază nici adevărul antecedentului, nici adevărul secventului.

Ea arată faptul că, dacă antecedentul este adevărat, atunci și secventul este adevărat, iar dacă antecedentul este fals, atunci secventul poate fi adevărat sau fals.

2.4. Echivalența.

Echivalența este redată în tabelul anterior al funcțiilor propoziționale pe coloana a șaptea; simbolul functorului echivalenței este “ \equiv ”, se citește “dacă și numai dacă..., atunci” și se definește prin următoarea tabelă :

p	\equiv	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Echivalența este adevărată când variabilele propoziționale au aceeași valoare de adevăr.

În limba română, echivalența este redată prin *propoziții bicondiționale* sau prin *judecăți ipotetice exclusive*, care redau relații dintre o *condiție necesară și suficientă*, și o consecință suficientă și necesară.

De exemplu,

Dacă și numai dacă astăzi iau nota 9, atunci voi avea media 8 la Logică.

Echivalența este o condiționare reciprocă din care rămâne numai raportul dintre valorile logice ale variabilelor propoziționale: două propoziții sunt echivalente, dacă au întotdeauna aceeași valoare logică - sunt împreună adevărate sau false - așa cum rezultă din tabel. Este vorba tot despre o *echivalență materială* care nu are în vedere relațiile dintre înțelesurile propozițiilor componente. În acest caz, formula “ $p \equiv q$ ” se citește “p este echivalent cu q”.

În ceea ce privește formulările verbale ale propozițiilor bicondiționale, în care se folosesc și unele formulări mai scurte “numai dacă ...”, “dacă..., atunci...” sau “cu condiția ca ...”, se enunță explicit numai condiția necesară sau numai aceea suficientă, cealaltă condiție fiind sugerată de context: *Numai dacă astăzi iau nota 9, atunci voi avea media 8 la Logică.* La fel, despre o echipă sportivă căreia i-ar fi necesară și suficientă o victorie pentru a ocupa primul loc în clasament se spune: *Va ocupa primul loc, cu condiția să învingă în ultima etapă.*

Desigur, atunci când se cere acuratețe logică, așa cum este cazul, de exemplu, propozițiilor matematice, se folosesc formulări complete și exacte.

2.5. Conjunția.

Conjunția este o funcție definită conform coloanei a opta din tabelul funcțiilor de adevăr.

Numim conjuncție a două propoziții, p și q , propoziția notată, $p \& q$, adevărată numai dacă p și q sunt adevărate.

Simbolul “&” se numește “semnul conjuncției” sau *conectorul conjuncției*, iar variabilele p și q se numesc *conjuncte*

p	&	Q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Expresia se citește “ p și q ”. De exemplu, *906 se divide cu 3 și cu 11*. De multe ori conjuncția a două propoziții poate fi redată prin “ p iar q ”, “ p , pe când q ”, “ p dar q ”.

De exemplu,

Ceasul meu arată ora exactă, iar al lui Ion (“pe când al lui Ion”, “dar al lui Ion”) a rămas în urmă.

De asemenea, o propoziție ca *Eminescu și Caragiale au fost scriitori*, unde, din punct de vedere gramatical, “și” leagă două nume, nu două propoziții, este o *conjuncție* alcătuită din propozițiile *Eminescu a fost scriitor și Caragiale a fost scriitor*. Altfel stau lucrurile cu “și” din *Eminescu și Caragiale au fost contemporani*, aceasta este o propoziție simplă care exprimă o relație dintre doi scriitori: *Eminescu a fost contemporan cu Caragiale*. Aceasta este o nouă dovadă că există deosebiri între analiza gramaticală și analiza logică.

2.6. Disjuncția neexclusivă

Disjuncția neexclusivă este definită în coloana a doua din tabelul funcțiilor de adevăr cu două variabile.



Numim disjuncție neexclusivă a două propoziții p și q , propoziția compusă, notată cu “ $p \vee q$ ”, adevărată, dacă cel puțin una din variabile are valoarea “1”.

Simbolul “ \vee ” se numește conectorul disjuncției neexclusive, iar “ p ” și “ q ” se numesc *disjuncte*. Expresia “ $p \vee q$ ”, conform definiției, are sensul de “ p sau/și q ”.

p	v	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

De exemplu,

Literații scriu în versuri sau în proză (nu este exclusă situația ca unii scriitori să se exprime și în versuri și în proză).

2.7. Disjuncția exclusivă

Propoziția compusă exclusiv-disjunctivă exprimă un sens restrâns al particulei sau: "sau, dar nu și"; în logică se face distincție între două feluri de disjuncție exclusivă. Unul este redat prin *negarea conjuncției*, iar celălalt prin *negarea echivalenței*.

Negarea conjuncției se scrie cu ajutorul *conectorului de incompatibilitate*.

Expresia propozițională "p/q" se citește "p este incompatibil cu q" și se definește ca fiind adevărată când cel puțin una din variabilele propoziționale are valoarea "0".

Aceasta înseamnă că p și q nu pot fi adevărate în același timp, dar pot fi false împreună:

p	/	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0

(cf. coloana a doua din *tabelul funcțiilor*).

De exemplu: *Acest metal este sodiu sau el este potasiu*, exprimă faptul că metalul respectiv nu poate fi și sodiu, și potasiu, dar și faptul că s-ar putea să nu fie nici sodiu, nici potasiu, pentru că este altceva.

Negarea echivalenței are ca simbol "w", sau "≠".

Propoziția compusă "pwq" se citește "sau p, sau q", având sensul că cele două propoziții nu pot fi nici adevărate, nici false împreună, conform coloanei a zecea din tabel:

p	w	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

Disjuncția exclusivă sau disjuncția tare, obținută prin negarea echivalenței, este adevărată când p și q au valori diferite de adevăr.

De exemplu:

Aceste mărimi sunt egale sau inegale.

3. Metoda tabelelor de adevăr

Am învățat să construim funcții de adevăr cu una și două variabile propoziționale folosind functori sau conectori de ordinul unu (negația) și de ordinul doi (implicație, echivalență, conjuncție, disjuncție inclusivă, incompatibilitate, disjuncție exclusivă). Acum putem folosi aceste cunoștințe pentru a construi *formule propoziționale* (pe scurt, *formule*).

Formulele sunt expresii formate din variabilele poziționale p, q, r, \dots și conectori, folosind parantezele, astfel încât să se asigure fiecărei expresii o lectură unică.

Ele sunt scheme de propoziții, adică fac abstracție de conținutul acestora și rețin modul în care sunt alcătuite, ca funcții de adevăr, din propoziții simple.

Literele p, q, r, \dots sunt de asemenea formule, și anume formule *atomice*, prin contrast cu acelea în care apar conectori, numite *moleculare*.

O situație specială o are functorul negației, deoarece acesta se aplică și variabilelor propoziționale și functorilor; de exemplu, formula:

$$p \vee \overline{(p \rightarrow q)}$$

De fiecare dată, negația schimbă valoarea de adevăr și a variabilei și a functorului, fapt pe care-l vom constata chiar în acest paragraf.

De asemenea, în cadrul formulelor, un rol important îl au parantezele; vom folosi, pentru simplificare, numai paranteze simple; de exemplu,

$$((p \rightarrow q) \& p) \rightarrow q$$

În această formulă, parantezele arată în primul rând că functorul “&” leagă moleculara “ $p \rightarrow q$ ” cu atomara “ p ”, apoi că functorul “ \rightarrow ” leagă formula “ $((p \rightarrow q) \& p)$ ” de “ q ”.

Să mai notăm că, în cadrul unei formule, un conector poate să aibă mai multe apariții, așa cum s-a întâmplat cu “ \rightarrow ” în formula anterioară. Parantezele arată la ce se aplică fiecare conector, în una sau în alta din aparițiile lui, în cadrul formulei.

Conectorul care, într-o formulă, îi acoperă pe toți ceilalți conectori (inclusiv celelalte eventuale apariții ale sale), se numește conectorul principal al respectivei formule.

Astfel, în formula anterioară, în a doua sa apariție, conectorul “ \rightarrow ” este *conectorul principal*.

Să studiem acum utilizarea *metodei tabelelor de adevăr*. Logica propozițiilor este o *teorie decidabilă*, adică există diverse procedee cu ajutorul cărora se poate decide, printr-un număr finit de pași, dacă o formulă a calculului propozițional este o tautologie, o contradicție sau o formulă sintetică.

Un astfel de procedeu de decizie, foarte simplu, este *metoda tabelor de adevăr* sau *metoda matricială*.

Am văzut că propozițiile compuse sunt funcții de adevăr, adică valoarea logică a propoziției compuse depinde numai de valorile de adevăr ale propozițiilor componente. Prin urmare, date fiind valorile logice ale fiecărei propoziții și definițiile operatorilor logici, putem afla valoarea logică de adevăr a propoziției compuse.

Se procedează astfel:

se atribuie variabilelor propoziționale valorile 1 (adevărat) și 0 (fals), conform formulei 2^n (unde 2 este numărul valorilor de adevăr, iar n este numărul variabilelor propoziționale) și se fac toate combinațiile posibile dintre 1 și 0; apoi, folosindu-se definițiile operatorilor logici utilizați în formulă, se află valoarea logică a propoziției compuse.

Recomandăm o *formă simplificată a metodei tabeli de adevăr*:

Verificăm mai întâi unele formule cu o singură variabilă: $2^1 = 2$ combinații.

1)

p	v	p
1	1	0
0	1	1

(conform definiției disjuncției inclusive, formula este o tautologie);

2)

p	&	p
1	0	0
0	0	1

(conform definiției conjuncției, formula este o contradicție);

3)

p	→	p
1	0	0
0	1	1

(conform definiției implicației, formula este sintetică sau realizabilă).

Să verificăm acum formulele cu *două variabile*:

$2^2 = 4$ combinații

(p	→	q)	&	p)	→	q
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0
1	5	2	6	3	7	4

Ultimul rând cu cifre reprezintă ordinea efectuării operațiilor.

Formula este o tautologie.

$$((p \vee \bar{q}) \& (p \equiv q)) \rightarrow ((\bar{p} / q) \wedge p)$$

1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	8	2	10	3	9	4	13	5	11	6	12	7

Formula este sintetică

Exercițiu:

Verificați formule cu trei variabile propoziționale, unde sunt $2^3 = 8$ combinații!

4. Propoziții compuse care exprimă legi logice

Dintre propozițiile compuse, tautologiile, adică *propozițiile întotdeauna adevărate*, sunt legi logice.

Aceasta este o caracteristică prin care legile logice se deosebesc de legile științelor neformale, exprimabile prin formule sintetice. Acestea pot fi adevărate, dar nu sunt întotdeauna adevărate, pentru că valoarea lor de adevăr depinde de *conținutul* lor. De exemplu, formula de mai sus, “ $p \rightarrow q$ ”, este adevărată numai dacă q este un secvent al lui p ; nu este o lege logică, dar ea poate să redea legi ale raporturilor de dependență (dintre condiție și consecință, cauză și efect, mijloc și scop etc.).

De exemplu,

Dacă o bară de metal este încălzită, atunci ea se dilată, unde este exprimat un raport de cauzalitate.

Legile logicii trebuie respectate în orice știință.

Nu se poate face știință în nici un domeniu fără aplicarea corectă a legilor logicii. Un argument important al acestei aserțiuni îl oferă *analiza limbii*. Așa cum am văzut, propozițiile se leagă între ele cu ajutorul unor conjuncții care redau *constante logice* (*și, sau, dacă... atunci...*). Toate științele folosesc aceste conjuncții; prin urmare, toate științele folosesc aceleași legături logice, iar legăturile logice impun aceleași legi.

Teoretic, se poate construi o infinitate de formule întotdeauna adevărate, dar numai unele, care sunt în număr restrâns, au semnificație în cadrul logicii și au aplicații importante pentru construirea de argumente corecte.

Legile logicii se deosebesc astfel de legile celorlalte științe prin faptul că ele sunt “etern valabile”, pentru orice act de gândire, pe când legile celorlalte științe sunt adevărate numai pentru domeniul unde acționează.

4.1. Legi logice cu valoare de principii în logica clasică.

Unele tautologii din logica propozițiilor compuse exprimă legi care erau considerate fundamentale în logica clasică. Aceste legi sunt redată în logica modernă prin formule simple pe care le vom studia în continuare.

4.1.1. *Legea identității*

În calculele logice, această lege consemnează că orice variabilă este echivalentă cu ea însăși: $p \equiv p$. Echivalența este conectorul logic care unește enunțuri cu aceeași valoare de adevăr (ambele sunt adevărate și ambele false), așa cum am văzut în paragraful 2.4. Nici o considerație de conținut nu intră în discuție. Legea identității este însă utilă pentru că permite substituții între variabile și între formule. Caracteristica sa principală este înlocuirea ei cu operația logică a afirmației, în sensul că aceasta este exprimată fără folosirea negației (“o variabilă, o formulă este ceea ce este”).

Această lege are și alte întrebări în logică: sunt argumente care se bazează pe ea; *tehnica definiției* o presupune; de asemenea, ea trebuie respectată în orice context pentru ca oamenii să se înțeleagă între ei. Asupra acesteia vom mai reveni.

4.1.2. *Legea necontradicției*

Aristotel a formulat astfel principiul necontradicției: “... este peste puțină ca unuia și aceluiași subiect să i se potrivească și totodată să nu i se potrivească sub același raport unul și același predicat...”.

În calculele logice, această lege este strâns legată de *operația logică a negației*. Această operație stabilește relațiile logice dintre propozițiile care sunt opuse din punct de vedere al valorii lor de adevăr.

Așa cum am văzut în paragraful 2.1. din capitolul II, functorul negației se definește prin *tabela valorilor de adevăr*, după cum urmează:

p	\bar{p}
1	0
0	1

unde p = orice propoziție

\bar{p} = negația propoziției p

Legea necontradicției arată că p și \bar{p} nu pot fi împreună adevărate: dacă una este adevărată, cealaltă trebuie să fie falsă.

Cele două linii ale tabelului arată aceasta: când p este adevărată \bar{p} este falsă, iar când \bar{p} este adevărată, p este falsă. Structura formală a legii este:

p	&	\bar{p}
1	1	0
0	1	1

Această lege exprimă o *condiție necesară a gândirii logice*: nu este admisă afirmarea concomitentă a unei propoziții și a negației sale. Dacă este încălcată exigența necontradicției, posibilitatea limbajului logic este anihilată. De fapt, legea este respectată în mod spontan. Dar se întâmplă ca, în timpul argumentărilor, indivizii să-și contrazică propriile opinii exprimate anterior. În acest sens, se spune că cerința necontradicției asigură *consecvența logică a argumentării*. Logica formală este dominată de legea necontradicției. A argumenta corect înseamnă în primul rând a nu te contrazice. Legea identității este mai greu încălcată în argumentarea individului normal și adult. Dar se întâmplă deseori ca indivizii să se contrazică în propriile lor păreri, atunci când se înfruntă tendințe și interese contrarii.

Legea necontradicției întemeiază anumite inferențe; pentru a argumenta falsitatea unei propoziții, este suficient să argumentăm adevărul propoziției opuse, așa cum vom vedea într-un alt paragraf.

4.1.3. *Legea terțului exclus*

Dar nu este cu puțință nici ca să existe un termen mijlociu între cele două extreme ale unei contradicții (Aristotel).

Operația negației nu este complet exprimată prin legea necontradicției. Ea arată, așa cum am văzut, că două propoziții opuse, p și \bar{p} , nu pot fi în același timp adevărate. Dar pot fi ambele false? Răspunsul îl oferă legea terțului exclus:

Propozițiile p și \bar{p} nu pot fi ambele false (în același timp și sub același raport), una trebuie să fie adevărată.

În logica relațiilor dintre propoziții, această lege arată că *este necesar* ca o formulă alcătuită din una sau mai multe variabile să fie sau să nu fie acceptată.

p	v	\bar{p}
1	1	0
0	1	1

Altfel spus, în mod necesar, o propoziție trebuie să fie adevărată sau falsă, a treia posibilitate nu există.

Înțelegem acum mai bine deosebirea importantă dintre cele două legi ale negației. Legea necontradicției afirmă o *imposibilitate*: nu se poate \bar{p} și p , de unde se deduce că, una dintre propoziții fiind adevărată, cealaltă trebuie să fie falsă. Legea terțului exclus (*tertium non datur*) exprimă o *necesitate*: trebuie să fie p sau \bar{p} , ceea ce duce la concluzia că, una dintre propoziții fiind falsă, cealaltă este adevărată.

4.1.4 *Legea bivalenței*

Legile negației se regăsesc într-o singură lege, cea a bivalenței, care întemeiază întreaga logică clasică în care se admit numai două valori de adevăr - legea bivalenței sau legea care combină legea necontradicției cu legea terțului exclus.

Formal, legea se exprimă cu ajutorul *disjuncției exclusive*: sau p sau \bar{p}

\bar{p}	w	\bar{p}
1	1	0
0	1	1

Propozițiile p și \bar{p} nu pot fi nici adevărate, nici false împreună.

Pe această lege se bazează anumite argumentări inferențiale, pe care le vom studia într-un paragraf ulterior.

4.1.5. *Legea dublei negații*

Un corolar al celor două legi ale negației este legea dublei negații:

Negarea negației este o afirmație indirectă.

$\bar{\bar{p}}$	\equiv	p
1	1	1
0	1	0

Această lege stă la baza constituirii unor inferențe numite *echivalențe* și a argumentelor demonstrative prin *reducere la absurd*.

4.1.6. *Legea întemeierii sau a rațiunii suficiente sau a condiționării*

“... nici un fapt nu poate fi adevărat sau real, nici o propoziție veridică, fără să existe un temei, o rațiune suficientă pentru care lucrurile sunt așa și nu altfel...”
(G.W.Leibniz)

În capitolul introductiv am stabilit că operația logică prin care se realizează întemeierea propozițiilor enunțiative este *inferența* sau *raționamentul*. În această operație, o propoziție numită concluzie se întemeiază pe una sau mai multe propoziții numite premise. Cu alte cuvinte, este o lege care veghează asupra desfășurării corecte a argumentării. Vom studia această lege la un nivel general, ca exprimând *raporturi de condiționare dintre valorile de adevăr ale propozițiilor*.

Două propoziții conexate prin condiționare sunt, în logica bivalentă, adevărate sau false, de unde rezultă că raportul de condiționare este de mai multe tipuri: el se exprimă prin funcții propoziționale al căror conector este implicația. Astfel, dacă p este adevărată, atunci și q este adevărată, ceea ce este echivalent cu dacă q este falsă, atunci și p este falsă:

$$1) (p \rightarrow q) \equiv (\bar{q} \rightarrow \bar{p}),$$

iar, dacă q este adevărată și p este adevărată, atunci falsitatea lui p se asociază cu falsitatea lui q :

$$2) (q \rightarrow p) \equiv (\bar{p} \rightarrow \bar{q}).$$

Legea întemeierii aplicată consecvent ne recomandă, pe de o parte, *să nu acceptăm ca adevăruri aserțiuni nedemonstrate*, iar, pe de altă parte, *să acceptăm propoziții demonstrate*, acelea pentru care ni se oferă temeuri suficiente. Formulele (1) și (2) caracterizează *spiritul științific*, încrederea în cunoașterea științifică.

A accepta ca adevărate idei nedemonstrate sau a ne îndoii de ceea ce este dovedit constituie încălcări ale legii întemeierii, izvorâte din atitudini înapoiate.

4.2. Propoziții compuse care exprimă argumentări inferențiale

4.2.1. Caracterizare generală; structura inferenței

În paragraful 2 al primului capitol am arătat că *a argumenta* înseamnă a întemeia unele propoziții cu ajutorul altora și că prin *inferență* înțelegem *un sistem de propoziții în care o propoziție derivă din altele*.

Din această definiție rezultă structura inferenței: propoziția care derivă, pe care o întemeiem, se numește *concluzie*; propozițiile din care derivăm, pe baza cărora întemeiem, se numesc *premise*.

Într-un raționament există întotdeauna o singură propoziție-concluzie, dar propozițiile-premise pot fi una sau mai multe. Dacă derivăm dintr-o singură premisă o concluzie, obținem o *inferență imediată*, iar dacă derivăm din două sau mai multe premise o concluzie, obținem o *inferență mediată*.

În funcție de tipul propozițiilor ce joacă rol de premise, există *raționamente cu propoziții simple* și *raționamente cu propoziții compuse*. La rândul lor, raționamentele cu propoziții compuse se împart în mai multe categorii, în funcție de felul propozițiilor compuse ce intră în alcătuirea lor.

Inferențele pot fi, așa cum am văzut, corecte, valide sau incorecte, nevalide. O inferență este corect construită, este *validă*, dacă între conjuncția premiselor și concluzie se instituie un raport de *implicație logică*, adică de fiecare dată când premisele sunt adevărate împreună și concluzia este adevărată. Într-un raționament valid, premisele fiind date ca adevărate, concluzia rezultă cu *necesitate* ca fiind adevărată.

Putem testa existența acestui raport de implicație logică prin metoda tabelelor de adevăr.

Fiecărui tip de inferență îi corespunde o anumită schemă logică ce poate fi exprimată printr-o formulă propozițională, printr-o *propoziție compusă condițională*, deoarece, așa cum am explicat, conjuncția premiselor implică concluzia. Dacă inferența este *validă*, propoziția compusă condițională ce o exprimă este o *tautologie*.

Vom prezenta în continuare formulele propoziționale ce exprimă structura logică a celor mai cunoscute argumentări inferențiale deductive, corecte, utilizate în practica argumentării.

4.2.2. *Inferențe disjunctive*

Inferențele disjunctive sunt acelea în care apar cu rol de premise propoziții disjunctive.

Cel mai des întâlnite în argumentare sunt *inferențele disjunctive mixte*, la care o premisă este propoziție disjunctivă, iar cealaltă premisă și concluzia sunt propoziții simple, enunțiative.

În funcție de felul disjuncției, apar mai multe “moduri”, tipuri de inferențe disjunctive:

Când disjuncția este exclusivă și obținută prin negarea conjuncției (*incompatibilitatea*), apare *modus ponendo-tollens*, care, la rândul său, are două forme:

$$\begin{array}{ll}
 p / q & p / q \\
 p & q \\
 \therefore \bar{q} & \therefore \bar{p}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 ((p/q) \& p) \rightarrow \bar{q} & ((p/q) \& q) \rightarrow \bar{p}
 \end{array}$$

În acest caz, afirmăm în premise una din propozițiile incompatibile pentru a o nega în concluzie pe cealaltă. De exemplu,

Acest metal este sodiu sau potasiu

Acest metal este sodiu

∴ Acest metal nu este potasiu.

Modus ponendo-tollens își bazează corectitudinea pe *legea necontradicției*, studiată în paragraful 4.1.2. din acest capitol.

Când disjuncția este inclusivă, apare *modus tollendo-ponens*, care, la rândul său, are două forme:

$$\begin{array}{ll}
 pvq & pvq \\
 \bar{p} & \bar{q} \\
 \therefore q & \therefore p
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 ((pvq) \& \bar{p}) \rightarrow q & ((pvq) \& \bar{q}) \rightarrow p
 \end{array}$$

În acest caz, negăm în premise o propoziție pentru a o afirma în concluzie pe cealaltă.

De exemplu,

Această carte este un manual pentru studenți sau elevi

Această carte nu este un manual pentru studenți

∴ Această carte este un manual pentru elevi.

Modus tollendo-ponens este corect pe baza *legii terțului exclus*, conform paragrafului 4.1.3.

Când disjuncția este exclusivă și obținută prin negarea echivalenței, sunt posibile ambele moduri:

modus ponendo-tollens

$p \neq q$		$p \equiv q$	
p	$((p \neq q) \& p) \rightarrow \bar{q}$	q	$((p \equiv q) \& q) \rightarrow p$
$\therefore q$		$\therefore \bar{p}$	

modus tollendo-ponens

$p \equiv q$		$p \neq q$	
\bar{p}	$((p \equiv q) \& \bar{p}) \rightarrow q$	\bar{q}	$((p \neq q) \& \bar{q}) \rightarrow p$
$\therefore q$		$\therefore p$	

Exercițiu:

Construiți cele patru forme, având ca premisă propoziția compusă: “Propozițiile sunt sau adevărate, sau false.”

Să ne reamintim *legea bivalenței*, deoarece aceasta reglementează corectitudinea acestor moduri realizate cu *non-echivalența*.

Denumirile acestor moduri provin din latină, de la verbul *ponere*, care înseamnă “a pune” (deci “punem”, afirmăm) și de la verbul *tollere*, care înseamnă “a suprima”, “a lua”.

Inferențele disjunctive joacă un rol important în viața practică și în activitatea științifică, deoarece recunoașterea și identificarea obiectelor se face cu ajutorul lor. De asemenea, unele demonstrații, după cum vom vedea, au la bază inferențe disjunctive.

4.2.3. *Inferențe ipotetice*

Inferențele ipotetice sunt acelea în componența cărora intră propoziții ipotetice, condiționale, care sunt concretizări ale relației de implicație.

Dacă premisele și concluzia sunt propoziții ipotetice, atunci apare o *inferență ipotetică pură*, numită și *silogism ipotetic*:

$p \rightarrow q$			
$q \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$		
$\therefore p \rightarrow r$			

În cazul acestui tip de inferență, acționează următoarea regulă: consecința consecinței este consecința condiției.

De exemplu,

Dacă copilul e brutalizat, devine nervos
Dacă copilul devine nervos, devine indisciplinat
 \therefore *Dacă copilul e brutalizat, devine indisciplinat.*

Dacă doar o premisă este propoziție ipotetică, cea de a doua premisă și concluzia fiind propoziții enunțiative, apare o *inferență ipotetică mixtă*.

În funcție de felul în care raționăm asupra *raportului de condiționare suficientă* exprimat de premisa ipotetică, obținem două “moduri” distincte, două tipuri de inferențe ipotetice mixte:

a) Când raționăm în mod direct, apare *modus ponendo-ponens*, mai scurt, *modus ponens*:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \quad \quad \quad ((p \rightarrow q) \& p) \rightarrow q \\ \therefore q \end{array}$$

În acest caz, știind că implicația este adevărată, afirmăm în premise *antecedentul* (condiția) pentru a *afirma* în concluzie *secventul* (consecința).

De exemplu,

Dacă pe o planetă există biosferă, atunci există oxigen

Există biosferă

∴ Există oxigen.

b) Când raționăm indirect, apare *modus tollendo-tollens*, pe scurt, *modus tollens*:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \bar{q} \quad \quad \quad ((p \rightarrow \bar{q}) \& q) \rightarrow \bar{p} \\ \therefore \bar{p} \end{array}$$

În acest caz, știind că implicația e adevărată, negăm în premise *secventul* (consecința) pentru a nega în concluzie *antecedentul*.

De exemplu,

Dacă pe o planetă există biosferă, există oxigen

Nu există oxigen

∴ Nu există biosferă.

Pe baza raportului de condiționare suficientă, putem deci raționa corect în două moduri: plecând de la afirmarea antecedentului sau de la negarea secventului. Dacă plecăm de la afirmarea secventului sau de la negarea antecedentului, obținem raționamente incorecte, nevalide.

- afirmarea secventului

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \quad \quad \quad ((p \rightarrow q) \& q) \rightarrow p \\ \therefore p \end{array}$$

- negarea antecedentului

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \bar{p} \quad \quad \quad ((p \rightarrow q) \& \bar{p}) \rightarrow \bar{q} \\ \therefore \bar{q} \end{array}$$

Exercițiu: Verificați cu ajutorul tabelelor de adevăr! Reveniți la exemplele (1) și (2) din paragraful 3, capitolul I și analizați-le pe baza noilor cunoștințe.

În cazul raportului de condiționare suficientă și necesară, raport exprimat prin conectorul “ \equiv ” (echivalență) putem raționa corect în patru moduri:

- *modus ponens* de la condiție $p \equiv q$

$$p \quad ((p \equiv q) \& p) \rightarrow q$$

$$\therefore q$$
- *modus ponens* de la consecință $p \equiv q$

$$q \quad ((p \equiv q) \& q) \rightarrow p$$

$$\therefore p$$
- *modus tollens* de la condiție $p \equiv q$

$$p^- \quad ((p \equiv q) \& p^-) \rightarrow q^-$$

$$\therefore q^-$$
- *modus tollens* de la consecință $p \equiv q$

$$q^- \quad ((p \equiv q) \& q^-) \rightarrow p^-$$

$$\therefore p^-$$

Raționamentele ipotetice mixte dețin un rol important în demonstrație, alcătuind schema principală a procedeelelor pentru susținerea sau combaterea unei teze.

Modus ponens oferă mijlocul principal prin care putem susține adevărul unei propoziții. Acest mod arată că adevărul unei aserțiuni trebuie întemeiat pe adevărul unei propoziții antecedente din care derivă.

Modus tollens servește la demonstrarea falsității unei teze. În acest scop, se cere să arătăm că din teza respectivă derivă consecințe false.

Exercițiu:

Construiți exemple pentru cele două raționamente incorecte și pentru cele patru moduri ale echivalenței.

4.2.4. Inferențe ipotetico-disjunctive (dileme)

Inferențele ipotetico-disjunctive sunt acelea în componența cărora intră atât propoziții condiționale, cât și propoziții disjunctive. Aceste inferențe combină în anumite feluri modurile studiate anterior, rezultând patru tipuri de dileme.

Dilemele au trei premise, dintre care două sunt propoziții condiționale, iar una disjunctivă.

Concluzia este fie o propoziție enunțiativă, fie o propoziție disjunctivă: dacă e o propoziție enunțiativă, dilema se numește *simplă*; dacă e o propoziție disjunctivă, dilema se numește *complexă*. dacă propoziția-concluzie este afirmativă, dilema se numește *constructivă*; dacă propoziția-concluzie este negativă, dilema este *distructivă*.

$p \rightarrow q$

$r \rightarrow q$

$p \vee r$

$\therefore q$

- *Dilema constructivă simplă*

$((p \rightarrow q) \& (r \rightarrow q) \& (p \vee r)) \rightarrow q$

De exemplu,

Dacă citesc lecția, înseamnă că învăț

Dacă-mi fac temele, înseamnă că învăț

Citesc lecția sau îmi fac temele

\therefore Învăț.

În cazul acestei dileme, afirmăm în premisa disjunctivă cei doi antecedenti ai premiselor condiționale, pentru a afirma în concluzie secvențul prezent în ambele premise condiționale.

- *Dilema constructivă complexă*

$p \rightarrow q$

$r \rightarrow s$

$p \vee r$

$\therefore q \vee s$

$((p \rightarrow q) \& (r \rightarrow s) \& (p \vee r)) \rightarrow (q \vee s)$

De exemplu,

Dacă citesc lecția, înseamnă că învăț

Dacă citesc ziarul, înseamnă că mă relaxez

Citesc lecția sau citesc ziarul

\therefore Învăț sau mă relaxez.

În cazul acestei dileme, afirmăm în premisa disjunctivă ambii antecedenti ai premiselor ipotetice, pentru a afirma în concluzie cei doi secvenți uniți prin disjuncție.

- *Dilema distructivă simplă*

$p \rightarrow q$

$p \rightarrow r$

$\bar{q} \vee \bar{r} \quad ((p \rightarrow q) \& (p \rightarrow r) \& (\bar{q} \vee \bar{r})) \rightarrow \bar{p}$

$\therefore \bar{p}$

De exemplu,

Dacă învăț, obțin note mari

Dacă învăț, am cunoștințe solide

Nu obțin note mari sau nu am cunoștințe solide

\therefore Nu învăț.

În cazul acestei dileme, negăm în premisa disjunctivă ambii secvenți din premisele ipotetice, pentru a nega în concluzie antecedentul din premisele ipotetice.

- *Dilema distructivă complexă*

$p \rightarrow q$

$r \rightarrow s$

$\bar{q} \vee \bar{s} \quad ((p \rightarrow q) \& (r \rightarrow s \& (\bar{q} \vee \bar{s}))) \rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$

$\therefore \bar{p} \vee \bar{r}$

De exemplu,

Dacă învăț logică, atunci raționez corect

Dacă învăț gramatică, atunci știu să scriu corect

Nu raționez corect sau nu scriu corect

\therefore N-am învățat logică sau n-am învățat gramatică.

În cazul acestei dileme, unim în premisa disjunctivă negațiile celor doi secvenți din premisele condiționale, pentru a uni în concluzie prin disjuncție negațiile celor doi antecedenti din premisele condiționale.

Dilema, în forme simple sau complexe, este o armă puternică de combatere. teza adversarului este analizată în toate interpretările posibile, arătându-se că fiecare dintre ele este inacceptabilă.